Übungsaufgaben: Mixed

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion f(x) = $2x^3 - 6x + 4$

a) Machen Sie eine begründete Aussage zur Symmetrie.
b) Wie verläuft der Graph von f für $x \to \pm\infty$?
c) Ermitteln Sie die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen (Schnittpunkt des Graphen mit der f(x)-Achse und Nullstellen berechnen!).
d) Bestimmen Sie die Extrema.
e) Bestimmen Sie die Wendepunkte.
f) Zeichnen Sie den Graphen von f.

Aufgabe 2:

Über eine Funktion f ist folgendes bekannt:

- f ist vierten Grades und achsensymmetrisch
- Bei x = -2,5 und x = 1 liegen Nullstellen.
- Der Graph schneidet die f(x)-Achse in S_y (0/-25).
- Der Graph ist um den Faktor 4 gestreckt.

a) Skizzieren Sie den Graphen.
b) Wie lautet die Funktionsgleichung von f? Begründen Sie Ihren Lösungsweg.

Aufgabe 3:

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades geht durch den Punkt Sy(0/-2). An der Stelle x = 1 liegt eine Nullstelle und ein Extremum vor. Die Steigung des Graphen an der Stelle x=2 beträgt m=6. Bestimmen Sie die dazugehörige Funktionsgleichung.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 0{,}5x^4 - 5x^2 + 4{,}5$.

a) Machen Sie eine begründete Aussage zur Symmetrie.
b) Wie verläuft der Graph von f für $x \to \pm\infty$?
c) Ermitteln Sie die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen (Schnittpunkt des Graphen mit der f(x)-Achse und Nullstellen berechnen!).
d) Bestimmen Sie die Extrema.
e) Bestimmen Sie die Wendepunkte.
f) Zeichnen Sie den Graphen von f.
g) Wo muss die zu f gehörende Ableitungsfunktion Nullstellen besitzen? Begründen Sie Ihre Aussagen. Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf von f´.

Aufgabe 5:

Gegeben sei die Funktion f(x) = - 0,5 (x - 4) (x + n)² mit $n \in \Re$

a) Erläutern Sie, wie die Variable n den Verlauf des Graphen beeinflusst.
Welche Gemeinsamkeiten haben sämtliche Graphen der Funktionenschar? Veranschaulichen Sie Ihre Aussagen, indem Sie für einige ausgewählte Werte n den ungefähren qualitativen Verlauf des Graphen von f skizzieren.
b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von f mit der f(x)-Achse.
c) Untersuchen Sie begründet das Symmetrieverhalten der Funktionenschar:
Für welchen Wert n weist der Graph von f Punktsymmetrie zum Ursprung bzw. Achsensymmetrie zur f(x)-Achse auf?) (Begründung)
d) Welcher Graph der Kurvenschar besitzt einen Sattelpunkt? Begründen Sie Ihre Aussage durch rechnerische Überprüfung der Sattelpunktbedingungen.

Aufgabe 6:

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat in P(-1/8) ein Extremum und schneidet in P(-2/0) die x-Achse mit der Steigung 18. Bestimmen Sie die dazugehörige Funktionsgleichung.

Übungsaufgaben: Mixed

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion $f(x)= \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}$.

a) Was wissen Sie über die Funktion f ?
b) Welche Steigung besitzt der Graph von f an der Stelle x = -2 ? (x = -3, x = 1, x = 2)
c) Wie lautet die Gleichung der Tangente von f im Punkt (-2 / -0,5) ?

Aufgabe 8:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 7x + 20$

a) Machen Sie eine begründete Aussage zur Symmetrie.
b) Wie verläuft der Graph von f für $x \to \pm\infty$?
c) Ermitteln Sie die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen (Schnittpunkt des Graphen mit der f(x)-Achse und Nullstellen berechnen!).
d) Bestimmen Sie die Extrema.
e) Bestimmen Sie die Wendepunkte.
f) Zeichnen Sie den Graphen von f.

Aufgabe 9:

Über eine ganzrationale Funktion f sind folgende Aussagen bekannt:

- f ist vierten Grades.
- Der Graph ist achsensymmetrisch zur f(x)-Achse.
- Die Funktion hat bei x = 1 und x = -2 Nullstellen.
- Der Graph schneidet die f(x)-Achse in S_y (0 / -1) .
- Der Graph ist um den Faktor 0,25 gestaucht.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
b) Wie lautet die Funktionsgleichung von f?.
c) Überprüfen Sie Ihre Lösung zu b): Sind sämtliche oben genannten Angaben erfüllt?

Aufgabe 10:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = a (x + 3)^2 (x + n)$. $a \in \Re \setminus \{0\}, n \in \Re$

a) Erläutern Sie, wie die Variablen a und n den Verlauf des Graphen beeinflussen.
Welche Gemeinsamkeiten haben sämtliche Graphen der Funktionenschar? Veranschaulichen Sie Ihre Aussagen, indem Sie für einige ausgewählte Werte a und n den ungefähren qualitativen Verlauf des Graphen von f skizzieren.
b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von f mit der f(x)-Achse (in Abhängigkeit von a).
c) Untersuchen Sie begründet das Symmetrieverhalten der Funktionenschar:
Für welchen Wert n weist der Graph von f Punktsymmetrie zum Ursprung bzw. Achsensymmetrie zur f(x)-Achse auf?) (Begründung)
d) Welcher Graph der Kurvenschar besitzt einen Sattelpunkt? Begründen Sie Ihre Aussage durch rechnerische Überprüfung der Sattelpunktbedingungen.

Aufgabe 11:

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat an der Stelle x = 1 eine Nullstelle und ein Extremum. Der Graph schneidet in P(-2/0) die x-Achse mit der Steigung m= -9. Bestimmen Sie die dazugehörige Funktionsgleichung.

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 3x^2$

a) Machen Sie eine begründete Aussage zur Symmetrie.
b) Wie verläuft der Graph von f für $x \to \pm\infty$?
c) Ermitteln Sie die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen (Schnittpunkt des Graphen mit der f(x)-Achse und Nullstellen berechnen!).
d) Bestimmen Sie die Extrema.
e) Bestimmen Sie die Wendepunkte.
f) Zeichnen Sie den Graphen von f.

Übungsaufgaben: Mixed

Aufgabe 13:

Über eine ganzrationale Funktion f ist bekannt:

- f ist vierten Grades und achsensymmetrisch zur f(x)-Achse.
- S_y liegt bei (0 / -6).
- Eine Nullstelle liegt bei x = -3.
- Eine weitere Nullstelle liegt bei x = 1.
- Der Graph ist um den Faktor $\frac{2}{3}$ gestaucht.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
b) Wie lautet die Funktionsgleichung von f?

Aufgabe 14:

Gegeben sei die Funktion $f(x)= -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

a) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt von f.
b) Welche Steigung hat die Tangente von f in P (2 / -2), Q (-2 / 4), R (4 / -9,5) ?
c) Wie lauten die zu b) gehörenden Tangentengleichungen?

Aufgabe 15:

Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ an der Stelle x = 1 einen Sattelpunkt besitzt.

Lösungen

1) a) Der Graph ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur f(x)-Achse, da die Funktionsgleichung sowohl gerade als auch ungerade Exponenten enthält.
b) Der Graph verläuft für sehr kleine x unter der x-Achse (kommt von unten) und für sehr große x über der x-Achse (verläuft nach oben) (N-Form), da f dritten Grades ist und a>0. c) $S_y(0/4)$ $N_1(-2/0)$ $N_2(1/0)$ d) Min (1/0) Max (-1/8)
e) W(0/4)

2)b Achsensymmetrie nutzen: => weitere Nullstellen bei –1 und 2,5
Skizze zeigt: Graph ist nach unten geöffnet => a = -4
Produktform aufstellen: $f(x) = -4(x + 2,5)(x - 2,5)(x + 1)(x - 1) = -4x^4 + 29x^2 - 25$ (bestätigt durch Sy (0/-25))

3) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$

4)a) Der Graph ist achsensymmetrisch zur f(x)-Achse, da die Funktionsgleichung nur gerade Exponenten enthält.
b) Der Graph verläuft für sehr kleine x über der x-Achse (kommt von oben) und für sehr große x auch über der x-Achse (verläuft nach oben) (W-Form), da f vierten Grades ist und a >0. c) $S_y(0/4,5)$ $N_1(-3/0)$ $N_2(-1/0)$ N_3 (3/0) N_4 (1/0)
d) Min (2,24/-8) Min (-2,24/-8) Max (0/4,5) e) $W_1(1,29/-2,43)$ $W_2(-1,29/-2,43)$ g) Die Ableitungsfunktion gibt die Steigung von f wieder. Sie hat dort Nullstellen, wo der Graph von f die Steigung Null aufweist. Dieses ist bei den Extremstellen von f der Fall, also bei x =-2,24, x =2,24 und x = 0. F´ hat dort also Nullstellen.

5) a) n bestimmt die Lage einer doppelten Nullstelle bei $x_n = -n$.
Sämtliche Graphen sind dritten Grades und verlaufen „von oben nach unten.“ Sämtliche Graphen besitzen eine einfache Nullstelle bei x = 4 und eine doppelte Nullstelle bei x = -n. b) S_y (0 /2n²) c) Der Graph von f kann - unabhängig von n - keine Achsensymmetrie zur f(x)-Achse aufweisen, da die Funktion f dritten Grades ist und somit nicht nur gerade Exponenten aufweist, sondern mindestens einen ungeraden Exponenten. Die Graphen weisen auch keine punktsymmetrischen Eigenschaften auf, da noch nicht einmal die Nullstellen Punktsymmetrie zum Ursprung aufweisen, sondern gänzlich unsymmetrisch liegen, unabhängig von dem Wert n. d) Sattelpunkt liegt vor für n =-4, also $f(x)= -0,5(x-4)^3$ Aus Produktform ist ablesbar, dass bei x=4 dann dreifache Nullstelle vorhanden ist (=Sattelpunkt), Überprüfung der Sattelpunktbedingungen:
$f'(x) = -1,5x^2 + 12x - 24$ $f''(x) = -3x + 12$ $f'''(x) = -3$ Es gilt tatsächlich: $f'(4) = 0$ und $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$.
=> Sattelpunkt vorhanden bei x =4.

6)) $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

7) a) Funktion 2. Grades (quadratische Funktion), Graph hat die Form einer gestauchten Normalparabel, $|a| = |0{,}5| = 0{,}5 < 1$, Graph ist nach oben geöffnet, da $a = 0{,}5 > 0$, Sy (0 / 3,5) Nullstellen $x_{n\,1} = -1{,}59$, $x_{n2} = -4{,}41$, Scheitelpunkt Min. (-3 / -1) b) $f'(x) = x + 3$ => $f'(-2) = 1$, $f'(-3) = 0$ (SP), $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$
c) $t(x) = m\,x + b$ $f'(-2) = 1$ => $m = 1$ Koordinaten (-2/-0,5) in t einsetzen ergibt: $-0{,}5 = 1\,(-2) + b$ => $b = 1{,}5$
=> $t(x) = x + 1{,}5$

8) a) Der Graph ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur f(x)-Achse, da die Funktionsgleichung sowohl gerade als auch ungerade Exponenten enthält.
b) Der Graph verläuft für sehr kleine x unter der x-Achse (kommt von unten) und für sehr große x über der x-Achse (verläuft nach oben) (N-Form), da f dritten Grades und a >0 c) $S_y(0/20)$ $N_1(-1/0)$ $N_2(2{,}5/0)$ $N_3(4/0)$ d) Min (3,31/-4,82) Max (0,35/21,19)
e) W(1,83/8,23)

9) a) Achsensymmetrie => weitere Nullstellen bei x = 2, x = -1
b) Ansatz z.B.: $f(x) = -0{,}25\,(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$ (Produktform) => $f(x) = -0{,}25\,x^4 + 1{,}25\,x^2 - 1$ (allgemeine Form)
c) - f ist 4. Grades (höchster Exponent ist 4)
- f ist achsensymmetrisch zur f(x)-Achse, da nur gerade Exponenten vorhanden sind.
- S_y (0 / -1), da c = -1
- um 0,25 gestaucht, da $|a| = |-0{,}25| = 0{,}25$
- $f(-2) = 0$ => Nullstelle bei -2
- $f(1) = 0$ => Nullstelle bei 1

10) a) Der Faktor a bestimmt die „Öffnungsrichtung“ und „Form“ des Graphen: Je größer |a| umso schmaler/steiler der Graphverlauf. Je kleiner |a| umso geweiteter der Graphverlauf. Da f 3. Grades ist, gilt: Für a>0 verläuft der Graph “von unten nach oben.“ Für a<0 verläuft der Graph „von oben nach unten.“ n bestimmt die Lage einer einfachen Nullstelle: $x_n = -n$. Sämtliche Graphen besitzen eine einfache Nullstelle bei x = -n. Sämtliche Graphen besitzen eine doppelte Nullstelle bei x = -3. b) S_y (0 / 9an) c) Der Graph von f kann - unabhängig von n - keine Achsensymmetrie zur f(x)-Achse aufweisen, da die Funktion f dritten Grades ist und somit nicht nur gerade Exponenten aufweist, sondern mindestens einen ungeraden Exponenten. Die Graphen weisen auch keine punktsymmetrischen Eigenschaften auf, da noch nicht einmal die Nullstellen Punktsymmetrie zum Ursprung aufweisen, sondern gänzlich unsymmetrisch liegen, unabhängig von dem Wert n. d) Sattelpunkt liegt vor für n =3 , also $f(x) = a\,(x + 3)^3$ Aus Produktform ist ablesbar, dass bei x=-3 dann dreifache Nullstelle vorhanden ist (=Sattelpunkt), Überprüfung der Sattelpunktbedingungen:
$f'(x) = 3ax^2 + 18ax + 27a$ $f''(x) = 6ax + 18a$ $f'''(x) = 6a$ Es gilt tatsächlich: $f'(-3) = 0$ und $f''(-3) = 0$ und $f'''(-3) \neq 0$. => Sattelpunkt vorhanden bei x =-3.

11) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

12) a) Der Graph ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur f(x)-Achse, da die Funktionsgleichung sowohl gerade als auch ungerade Exponenten enthält.
b) Der Graph verläuft für sehr kleine x über der x-Achse (kommt von unten) und für sehr große x über der x-Achse (verläuft nach oben) (W-Form), da f vierten Grades und a >0. c) $S_y(0/0)$ $N_{1/2}(0/0)$ $N_3(-2/0)$ $N_4(-3/0)$ d) Min (0/0) Max (-1,16/1,04) Min (-2,59/-0,81) e) $W_1(-2/0)$ $W_2(-0{,}5/0{,}47)$

13) Ansatz z.B.: $f(x) = a\,(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)$ => $f(x) = a\,x^4 - 10\,a\,x^2 + 9a$
wegen Sy (0 / -6) muss gelten: $9a = -6$ => $a = -\frac{2}{3}$ => $f(x) = -\frac{2}{3}\,x^4 + \frac{20}{3}\,x^2 - 6$

14) a) S(-2 / 4) b) $f'(2) = -3$, $f'(-2) = 0$ (SchP), $f'(4) = -4{,}5$
c) P: $t(x) = -3\,x + 4$ Q: $t(x) = 4$ R: $t(x) = -4{,}5\,x + \frac{19}{36}$

15) $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$ $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$ $f'''(x) = 72x - 48$ Es gilt tatsächlich: $f'(1) = 0$ und $f''(1) = 0$ und $f'''(1) \neq 0$. => Sattelpunkt vorhanden bei x =1.