Begriffe - „Typen“

Quadratische Gleichungen sind Gleichungen, in denen der höchste Exponent der Unbekannten 2 ist.
Lineare Gleichungen sind Gleichungen, in denen der höchste Exponent der Unbekannten 1 ist.

<u>Aufgabe 1</u>: Entscheiden Sie: Welche der folgenden Gleichungen sind linear, welche quadratisch?

a)	$2x - x^2 = 7$	g)	$4x + 3 = 2x$	m)	$(x - 4)(x + 9) = 0$
b)	$2x - 2 = 0$	h)	$4x^2 - 4 = 0$	n)	$5x + 10 = x^2$
c)	$x^2 = 25$	i)	$(x - 3)^2 = 0$	o)	$x (x + 6) = 2$
d)	$x (x + 6) = 0$	j)	$(x + 2)^2 = 1$	p)	$8x = -16$
e)	$- x^2 - 0,5 x = 6x$	k)	$5 x^2 = 125$	q)	$2x^2 - 6x + 9 = 0$
f)	$x^2 + 12 x = 0$	l)	$x^2 - 4x + 4 = 0$	r)	$-3x +2 = 4$

Quadratische Gleichungen können ganz verschieden aussehen. Durch **Umstellen** der Gleichung und **Zusammenfassen** lassen sie sich immer auf eine der folgenden **Grundformen** - „***Typen***“ - bringen:

1.	$\mathbf{x^2 = a}$	reinquadratische Gleichung
2.	$\mathbf{x^2 + p x = 0}$	quadratische Gleichung ohne Konstante/Absolutglied
3.	$\mathbf{(x + m)(x + n) = 0}$	Produktform
4.	$\mathbf{x^2 + p x + q = 0}$	Normalform
5.	$\mathbf{a x^2 + b x + c = 0}$	allgemeine Form

<u>Aufgabe 2</u>: Entscheiden Sie, welche der Gleichungen aus Aufgabe 1 zu welchem Typ gehört.
Bringen Sie die Gleichungen dazu (ggf.) in die entsprechende Grundform.

1. Lösen quadratischer Gleichungen vom Typ $x^2 = a$ (reinquadratisch)

Beispiele: $x^2 = 4 \mid \sqrt{\ }$

$\underline{\underline{x_1 = 2}}$ $\underline{\underline{x_2 = -2}}$

$4 x^2 = 12 \mid : 4$

$x^2 = 3 \mid \sqrt{\ }$

$\underline{\underline{x_1 = \sqrt{3} \approx 1,71}}$ $\underline{\underline{x_2 = -\sqrt{3} \approx -1,71}}$

<u>Aufgabe 3</u>: Lösen Sie: a) $3 x^2 = 12$ b) $-2 x^2 = 8$ c) $5 x^2 = -2 x^2$ d) $6 x^2 - 6 = 0$

2. Lösen quadratischer Gleichungen vom Typ $x^2 + p x = 0$ (ohne Konstante)

Zum Lösen von Gleichungen diesen Typs wird folgender **Satz** (Nullproduktsatz) genutzt:
Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.
(d.h.: wenn $x y = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$)

Beispiel:

$x^2 + 6x = 0$ — 1. Faktorisieren: Ausklammern von x

$x (x + 6) = 0$ — ein Produkt mit 2 Faktoren ist entstanden: 1. Faktor: x, 2. Faktor: (x+6)

$x = 0$ oder $x + 6 = 0$ — 2. der Satz wird angewendet: die beiden Faktoren werden jeweils Null gesetzt. Anschließend kann gelöst werden.

$\underline{\underline{x_1 = 0}}$ $\underline{\underline{x_2 = -6}}$ (***)

<u>Aufgabe 4:</u> Lösen Sie wie im Beispiel. Bringen Sie die Gleichung zunächst auf die Grundform.

a) $-x^2 + 5x = -3x$	b) $x^2 - 2x = 0$	c) $x^2 = - 4x$
d) $-x^2 - 0,5x = 6x$	e) $x^2 + 12x = 0$	f) $-7x = - x^2$

<u>Aufgabe 5:</u> Lösen Sie wie im Beispiel. Bringen Sie die Gleichung zunächst auf die Grundform.

a) $5x^2 - 10x = 0$	b) $6x^2 = - 3 x$	c) $-2 x^2 = x^2 + 3x$
d) $4x = 2 x^2 + 8x$	e) $3x^2 - 9x = 0$	f) $-7x = - 21x^2$

(***)Machen Sie die Probe: Setzen Sie für x 0 ein. Was passiert? Setzen Sie für x -6 ein. Was passiert?

3. Lösen quadratischer Gleichungen vom Typ (x + m)(x + n) = 0 (Produktform)

Zum Lösen von Gleichungen diesen Typs wird ebenfalls o.g. **Satz** (Nullproduktsatz) genutzt.

Beispiel: $(x - 4)(x + 3) = 0$

$x - 4 = 0$ oder $x + 3 = 0$

$\underline{\underline{x_1 = 4}}$ $\underline{\underline{x_2 = -3}}$

Dieses ist bereits ein Produkt mit 2 Faktoren:
1. Faktor: (x - 4), 2. Faktor: (x + 3)
Der Satz kann sofort angewendet werden: die beiden Faktoren werden jeweils Null gesetzt.
Anschließend kann gelöst werden.

(Machen Sie die Probe:
Setzen Sie für x 4 ein. Was passiert?
Setzen Sie für x -3 ein. Was passiert?)

<u>Aufgabe 6:</u> Lösen Sie wie im Beispiel.

a) $(x + 3)(x - 2) = 0$ b) $(x - 5)(x - 7) = 0$ c) $(x + 9)(x + 33) = 0$
d) $(x - 1)(x + 14) = 0$ e) $(x - 4{,}5)(x - 11{,}2) = 0$ f) $(x + 3)(x + 3) = 0$

4. Lösen quadratischer Gleichungen vom Typ x² + p x + q = 0 (Normalform)

Es gibt *zwei* Lösungsmethoden: Lösen mit **p/q-Formel** oder Lösen durch **„quadratische Ergänzung“**.
Hier wird das Lösen mit p/q-Formel vorgestellt:

Beispiel: $x^2 + 6x + 5 = 0$ also: p = 6, q = 5

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 5}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9 - 5}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm 2$$

$$\underline{\underline{x_1 = -1}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -5}}$$

<u>Aufgabe 7:</u> Lösen Sie wie im Beispiel. Bringen Sie die Gleichung zunächst in die Normalform.

a) $x^2 + 6x - 16 = 0$ b) $x^2 - 5x = -6{,}25$ c) $x^2 - 1{,}8x = 0{,}19$ d) $1 + x^2 + 2x = -2$

5. Lösen quadratischer Gleichungen vom Typ ax² +b x + c = 0 (allgemeine Form)

Beispiel: $-0{,}5\,x^2 + 3{,}5x + 15 = 0 \quad | : (-0{,}5)$

$x^2 - 7x - 30 = 0$ also: p = -7, q = -30

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 + 30}$$

$$x_{1/2} = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 + 30}$$

$$x_{1/2} = 3{,}5 \pm 6{,}5$$

$$\underline{\underline{x_1 = 10}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -3}}$$

<u>Aufgabe 8:</u> Lösen Sie wie im Beispiel. Bringen Sie die Gleichung zunächst in die Normalform.

a) $2x^2 + 4x + 2 = 0$ b) $3x^2 - 24x = -48$ c) $0{,}25x^2 - x = -5$ d) $-7 - 0{,}5x^2 + 4{,}5x = 0$

<u>Aufgabe 9:</u> Lösen Sie die Gleichungen aus Aufgabe 1.

Lösungen:

3)a) x_1=2 x_2=-2 b)keine Lösg c)$x_{1/2}$= 0 d)x_1=1 x_2=-1 4)a) x_1=0 x_2=8 b)x_1=0 x_2=2 c)x_1=0 x_2=-4 d)x_1=0 x_2=-6,5 e)x_1= 0 x_2=-12 f)x_1=0 x_2=7 5) a)x_1=0 x_2=2 b)x_1=0 x_2=-0,5 c)x_1=0 x_2=-1 d)x_1=0 x_2=-2 e)x_1=0 x_2=3 f) x_1=0 x_2=$\frac{1}{3}$ 6)a)x_1=-3 x_2=2 b)x_1=5 x_2=7 c)x_1=-9 x_2=-33 d)x_1=1 x_2=-14 e)x_1=4,5 x_2=11,2 f) $x_{1/2}$= -3 7)a)x_1=2 x_2=-8 b)$x_{1/2}$= 2,5 c)x_1=1,9 x_2=-0,1 d)keine Lösg 8)a)$x_{1/2}$=-1 b)$x_{1/2}$=4 c)keine Lösg d)x_1=2 x_2=7 9)a)keine Lösg. b)x=1 c)x_1=5 x_2=-5 d)x_1=0 x_2=-6 e)x_1=0 x_2=-6,5 f)x_1=0 x_2=-12 g)x=-1,5 h)x_1=1 x_2=-1 i)$x_{1/2}$=3 j)x_1=-1 x_2=-3 k) x_1=5 x_2=-5 l)$x_{1/2}$=2 m)x_1=4 x_2=-9 n)x_1=-6,53 x_2=1,53 o)x_1=-6,32 x_2=0,32 p)x=-2 q)keine Lösg. r)x=$-\frac{2}{3}$